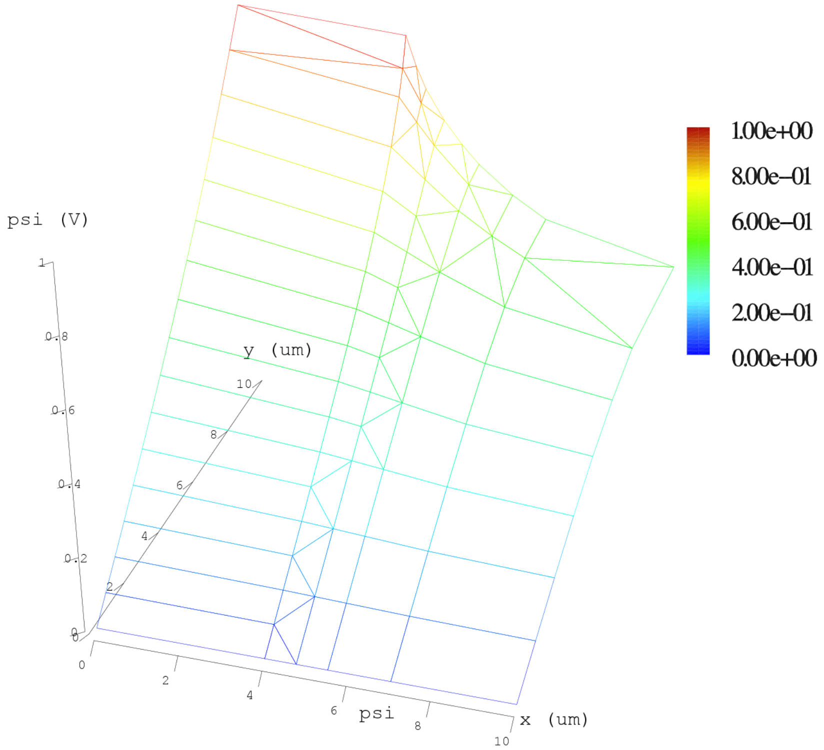
Critère de correction du maillage

Ancien critère

Considérons la distribution de potentiel du dispositif donné en exemple,
2D->electrostatique->polarisation_simple pour une polarisation de 1V sur l'Anode :



Ce maillage est composé de 83 noeuds.
Actuellement, pour corriger le maillage, il faut dans un premier temps calculer les variations maximales des grandeurs sensibles sur l'ensemble du dispositif (potentiel, densité d'électrons, densité de trous, …).

Pour l'exemple précédent, la variation maximale du potentiel sur l'ensemble du dispositif est : $variation_{max}=1\mathrm{V}$

Considérons une arète du maillage et les valeurs d'une grandeur à ses extrémités notée $G_{départ}$ et $G_{arrivée}$:

La variation de la grandeur le long de l'arète sera notée : $variation_{arete}=|G_{arrivée}-G_{départ}|$

Pour notre exemple, nous avons utilisé les paramètres : $taille\_maximum\_arete=6\,\mu m$
$précision\_espace=0.1$

- Si $\frac{variation_{arete}}{variation_{max}} > précision\_espace * variation_{max}$ l'arète est scindée en 2 arètes plus petites de tailles égales.

- Si $\frac{variation_{arete}}{variation_{max}} < précision\_espace * critère\_relachement * variation_{max}$ l'arète est fusionnée avec l'arète voisine qui respecte également ce critère de relachement.

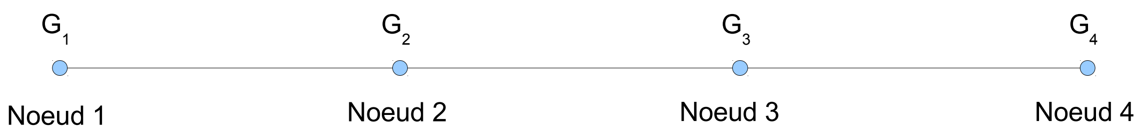
- Sinon l'arète reste inchangée.

Critère basé sur des interpolations polynomiales

Lorsqu'on discrétise des équations différentielles par la méthode des éléments finis, il faut effectuer des approximations polynomiales sur les grandeurs calculées dans chaque éléments du maillage. On considère le plus souvent que la grandeur varie de façon linéaire à l'intérieur de chaque élément. Cette approximation est d'autant plus vraie que les éléments sont petits.

Dans certaines zones du dispositif les grandeurs varient effectivement de façon linéaire et dans ce cas un seul élément permettra d'avoir une solution exacte. Dans d'autres zones, une variation fortement non linéaire des grandeurs nécessitera beaucoup d'éléments pour s'approcher de la solution exacte.

Considérons le groupe d'arètes suivant :



et les polynômes de Lagrange de degré 3 aux noeuds 1, 2, 3 et 4 :

$$P3_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \qquad P3_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$P3_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \qquad P3_4 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

Ces polynômes valent 1 au noeud considéré et 0 aux autres noeuds. Ils peuvent s'écrire sous la forme : $P3_j = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{4} x - x_i}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{4} x_j - x_i}$

L'interpolation polynomiale de degré 3 de G s'écrira : $G_{d3} = G_1 P3_1 + G_2 P3_2 + G_3 P3_3 + G_4 P3_4$

Considérons maintenant l'approximation linéaire faite à l'arète située entre les noeuds 2 et 3 notée arète$_{23}$.

Les polynômes de Lagrange de degré 1 dans l'arète$_{23}$ s'écriront : $P1_2 = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$ $\quad P1_3 = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$

et l'interpolation de degré 1 de G dans l'arète$_{23}$ s'écrira : $G_{d1} = G_2 P1_2 + G_3 P1_3$

et nous obtenons une bonne approximation de l'erreur faite par l'interpolation linéaire le long de l'arète par : $Erreur_{d3}(x) = G_{d3} - G_{d1} = G_1 P3_1 + G_2(P3_2 - P1_2) + G_3(P3_3 - P1_3) + G_4 P3_4$

Pour obtenir l'erreur dans la totalité de l'élement : $Erreur_{d3élément} = \int_{x=x_2}^{x=x_3} Erreur_{d3}(x)dx$

$$Erreur_{d3élément} = \int_{x=x_2}^{x=x_3} G_1 P3_1 + G_2(P3_2 - P1_2) + G_3(P3_3 - P1_3) + G_4 P3_4 dx$$

Après calcul avec le logiciel de calcul formel Giac/Xcas on obtient :

$$Erreur_{d3élément} = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{x_3 - x_2}$$

$$avec$$

$$E_1 = \frac{(x_2 - x_3)*(x_2 - x_3)*(x_2 - x_3)*G_1*(2*x_4 - x_3 - x_2)}{12*(x_4 - x_1)*(x_3 - x_1)*(x_2 - x_1)}$$

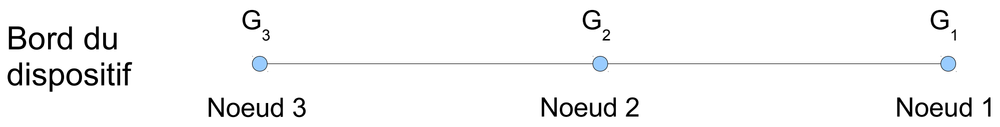
$$E_2 = \frac{(x_3 - x_2)*(x_3 - x_2)*(2*x_1 - 3*x_2 - x_3 + 2*x_4)*G_2}{12*(x_2 - x_4)*(x_1 - x_2)}$$

$$E_3 = \frac{-(x_3 - x_2)*(x_3 - x_2)*(2*x_1 - x_2 - 3*x_3 + 2*x_4)*G_3}{12*(x_3 - x_4)*(x_1 - x_3)}$$

$$E_4 = \frac{(x_3 - x_2)*(x_3 - x_2)*(x_3 - x_2)*G_4*(-2*x_1 + x_2 + x_3)}{12*(x_3 - x_4)*(x_2 - x_4)*(x_1 - x_4)}$$

<u>Cas des bords du dispositif</u>

Dans certains cas (bords du dispositif) nous ne disposerons que de 3 points.



Pour déterminer l'erreur de discrétisation nous utiliserons alors un polynôme de degré 2.
nous aurons les polynômes de Lagrange suivants aux noeuds 1, 2 et 3 :

$$P2_1=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \qquad P2_2=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \qquad P2_3=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

et l'interpolation polynomiale de degré 2 de G s'écrira : $G_{d2}=G_1 P2_1+G_2 P2_2+G_3 P2_3$
L'approximation de l'erreur sera donnée par :

$$Erreur_{d2}(x)=G_{d2}-G_{d1}=G_1 P2_1+G_2(P2_2-P1_2)+G_3(P2_3-P1_3)$$

Pour obtenir l'erreur dans la totalité de l'élement : $Erreur_{d2élément}=\int_{x=x_2}^{x=x_3} Erreur_{d2}(x)\,dx$

$$Erreur_{d2élément}=\int_{x=x_2}^{x=x_3} G_1 P2_1+G_2(P2_2-P1_2)+G_3(P2_3-P1_3)\,dx$$

Après calcul avec le logiciel de calcul formel Giac/Xcas on obtient :

$$Erreur_{d2élément}=\frac{E_1+E_2+E_3}{x_3-x_2}$$

$$avec$$

$$E_1=\frac{-(x3-x2)*(x3-x2)*(x3-x2)*G_1}{6*(x3-x1)*(x2-x1)}$$

$$E_2=\frac{(x3-x2)*(x3-x2)*G2}{6*(x2-x1)}$$

$$E_3=\frac{-(x3-x2)*(x3-x2)*G3}{6*(x3-x1)}$$

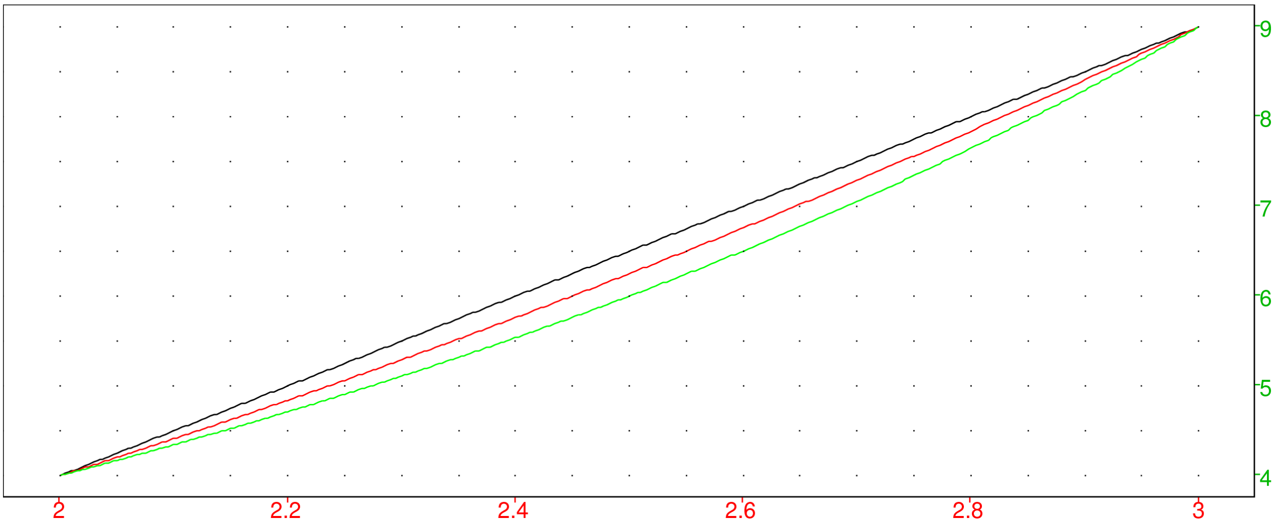
Exemple :
Considérons les valeurs suivantes :

$$x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=3 \quad x_4=4$$

$$G_1=1 \quad G_2=4 \quad G_3=9 \quad G_4=20$$

nous recherchons l'erreur de discrétisation entre les points de coordonnées $x_2=2 \ et \ x_3=3$

Les courbes suivantes montrent $G_{d1} \ en noir, \ G_{d2} \ en \ rouge \ et \ G_{d3} \ en \ vert$

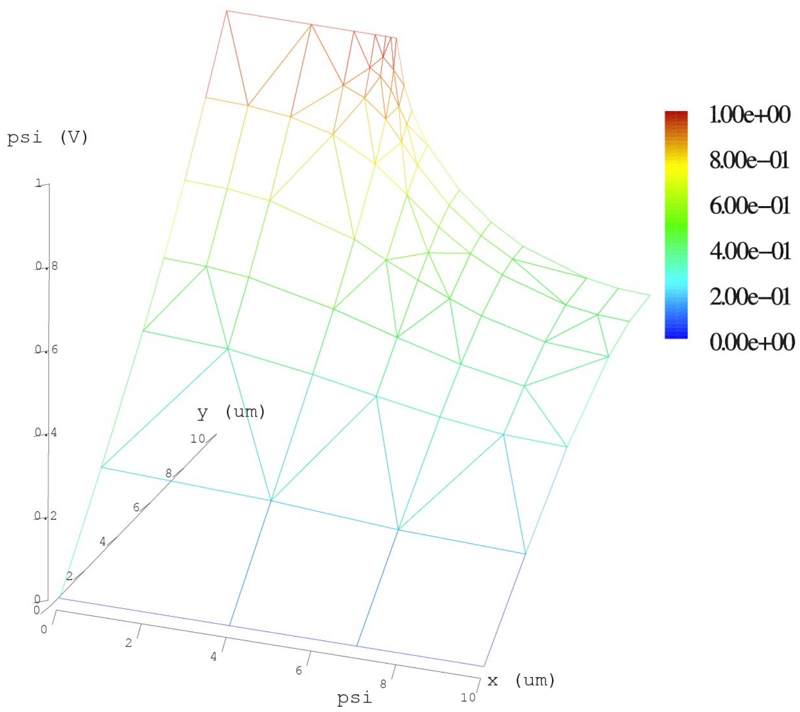


et celles-ci montrent $G_{d3}-G_{d1}$ $(en\ rouge)$ et $G_{d2}-G_{d1}$ $(en\ noir)$ $entre\ les\ points\ x_2\ et\ x_3$

On remarque que l'erreur calculée par différence avec le polynôme de degré 2 est plus faible que celle calculée avec le polynôme de degré 3.

Voici le résultat obtenu avec ce nouveau critère. Il est composé de 76 noeuds et a été obtenu avec les paramètres suivants : $taille\_maximum\_arete = 6\,\mu m$

$précision\_espace = 0.015$

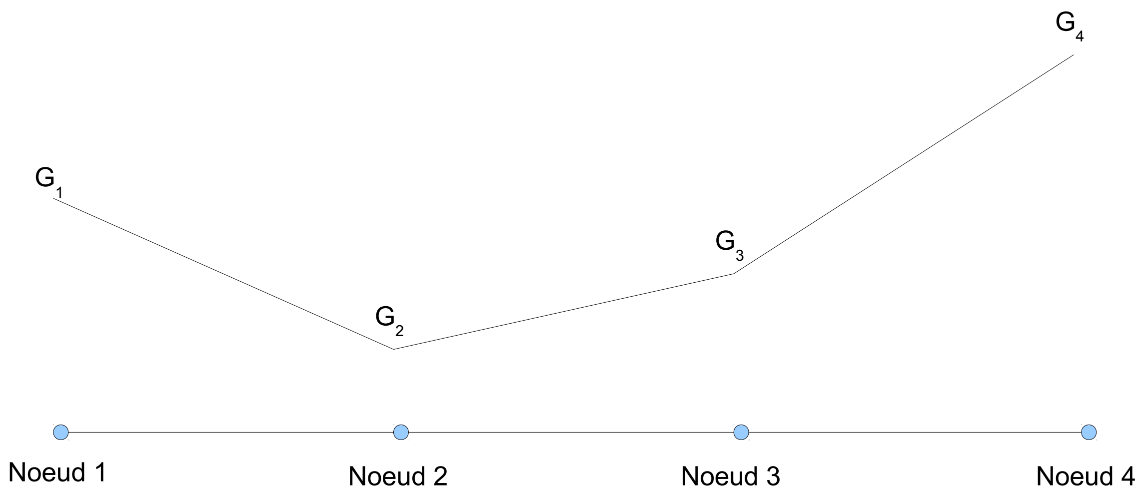


Les zones « courbes » semblent mieux décrites et les zones linéaires comportent moins de noeuds (voir à proximité de la cathode).

Après application de ce critère à d'autres dispositifs, il est apparu qu'il n'améliore pas suffisamment la précision. Par ailleurs, il n'apporte pas une meilleure convergence pour les dispositifs à problème tels que le mos de type n (2D->heterojonction->mos_n)

Critère basé sur la variation de la dérivée première de la grandeur

Considérons à nouveau notre groupe d'arêtes et une grandeur associée à chaque noeud :



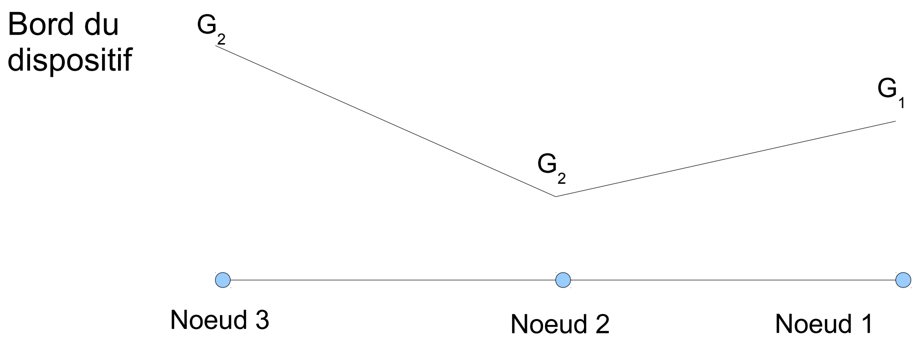
Considérons les pentes entre les noeuds 3 et 1 et les noeuds 4 et 2 :

$$pente_{31}=\frac{G_3-G_1}{x_3-x_1} \quad et \quad pente_{42}=\frac{G_4-G_2}{x_4-x_2}$$

Une approximation intéressante de l'erreur s'écrit :

$$Erreur_{élément}=(pente42-pente31)*(x3-x2)$$

<u>Cas des bords du dispositif</u>
Au bord du dispositif nous aurons la disposition suivante des noeuds et des grandeurs :



Nous pouvons considérer les pentes :

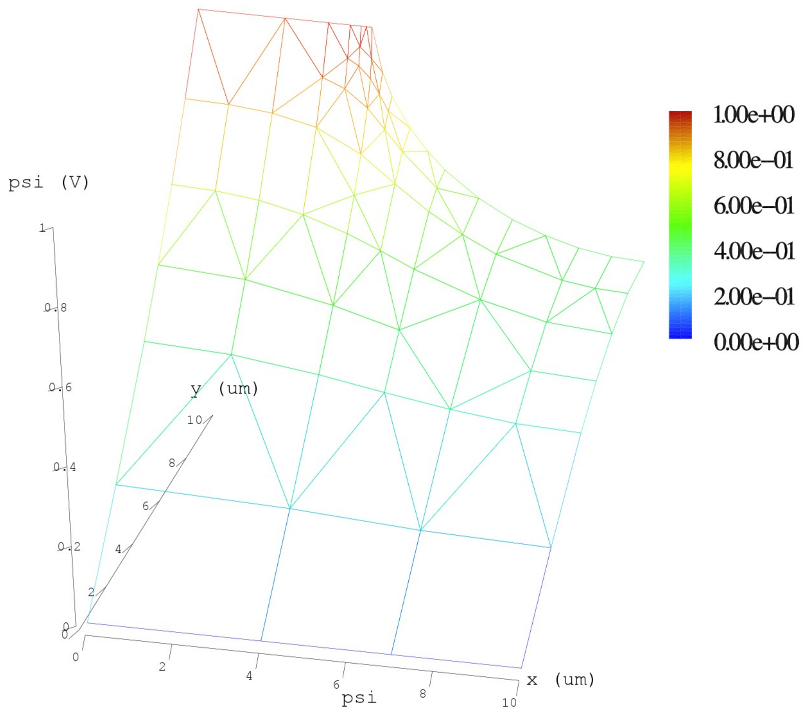
$$pente_{21}=\frac{G_2-G_1}{x_2-x_1} \quad et \quad pente_{32}=\frac{G_3-G_2}{x_3-x_2}$$

L'approximation de l'erreur s'écrit :

$$Erreur_{élément}=(pente32-pente21)*(x3-x2)$$

$$Erreur_{élément}=(pente32-pente21)*(x3-x2)$$

Voici le résultat obtenu avec ce critère. Il est composé de 75 noeuds et a été obtenu avec les paramètres : $\begin{array}{c} taille\_maximum\_arete=6\,\mu m \\ précision\_espace=0.1 \end{array}$



Pour cette modélisation simple, ce résultat est très similaire à celui obtenu avec le critère basé sur des interpolations polynomiales. Pour les dispositifs plus complexes comme les transistors mos, la distribution différente des noeuds semble donner une meilleure convergence et des résultats plus précis.

A ce jour (21 octobre 2010) E.CO.R.C.E corrige le maillage suivant ce critère.